

Precificação de opções flexíveis com barreiras por meio de árvores binomiais

Rudini Menezes Sampaio
Edson Costa Bignotto

Neste artigo, apresenta-se metodologia de precificação para diversos tipos de opções flexíveis com barreiras, que utiliza o modelo de árvores binomiais de Cox, Ross e Rubinstein e o conceito de reflexão estocástica sobre cadeias de Markov. Descreve-se também a aplicação desse método sobre opções flexíveis com limitadores cap ou floor e barreiras knock-in, knock-out e combinações.

Introdução

Na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), existem contratos de opções flexíveis de compra ou venda sobre Ibovespa e dólar. Com o objetivo de reduzir riscos de mercado e oferecer mais estratégias de *hedge*, esses contratos permitem a escolha do tipo da opção – europeia ou americana – e o uso de barreiras *knock-in* e *knock-out* e de limitador de preço de exercício da opção (*cap* ou *floor*). Com relação às barreiras, são admitidas combinações de, no máximo, dois tipos distintos. Ou seja, barreira dupla *knock-in* ou dupla *knock-out* são proibidas.

Na bibliografia especializada, constata-se a escassez de modelos eficientes para precificar a maioria das

opções com combinações de barreiras. Apesar de o método de Monte Carlo ser comumente utilizado, tem sua convergência discutível, além de requerer muito tempo de processamento, já que são exigidas várias simulações (na ordem de 10.000) para redução do erro inerente ao processo, prejudicando a dinâmica necessária ao mercado.

O método por árvores binomiais é bastante conhecido, inclusive por sua convergência à fórmula de Black-Scholes para opções europeias, mas quando aplicado às opções com barreiras, a precificação torna-se dependente do caminho, ocasionando tempo exponencial.

No entanto, com a aplicação do conceito de reflexão estocástica so-



bre árvores binomiais, podem ser contabilizados os caminhos que chegam a cada folha da árvore e que tocam a *knock-in* e evitam a *knock-out*. Assim, é possível precificar de forma eficiente essas opções.

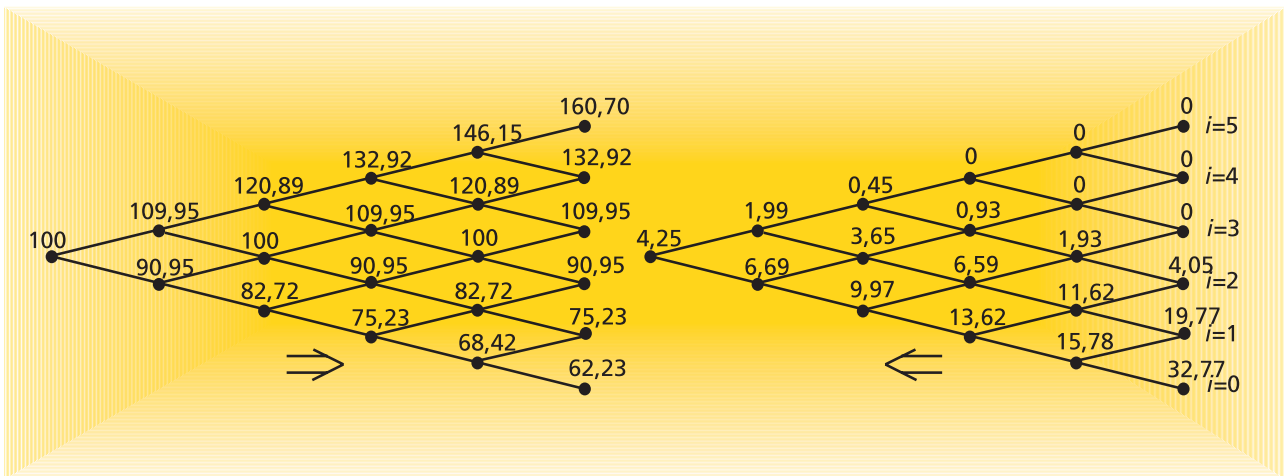
Árvores binomiais de Cox–Ross–Rubinstein

O método por árvore binomial reproduz o movimento geométrico browniano dos ativos-base por meio de discretização. Sejam T o período de vencimento da opção; n a largura da árvore; r a taxa livre de risco; σ a volatilidade do ativo-base; S o preço atual do ativo-base; e X o preço de exercício da opção ou *strike*. Seja $\Delta t = T/n$, o tempo entre dois níveis da árvore. Em cada nó da árvore, o preço do ativo-base pode aumentar por fator u ou diminuir por fator d , onde $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$,

com probabilidade p e q , respectivamente, onde $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ e $q = 1 - p$.

Considere a opção europeia de venda com seis meses ($T = 0,5$) para o vencimento, com $S = 100$; $X = 95$; $r = 8\%$ ao ano; e $\sigma = 30\%$ ao ano. Para $n = 5$, $\Delta t = 0,1$; $u = 1,0995$; $d = 0,9095$; $p = 0,5186$; e $q = 0,4814$. Logo, o preço da opção é igual a 4,25 (Figura 1) trazido ao valor presente de 4,08.

Figura 1 – Árvore binomial com preços do ativo-base e da opção de venda



Fórmula geral para opções europeias

O preço da opção europeia por árvores binomiais pode ser dado pela fórmula:

$$\text{europeia}(n) = (1 + r)^{-n\Delta t} \sum_{i=0}^n p^i (1 - p)^{n-i} \times n\text{paths}(i) \times \text{payoff}(i) \quad (A)$$

onde:

$n\text{paths}(i)$ = número de caminhos possíveis da raiz da árvore binomial até a folha i ;

$\text{payoff}(i)$ = prêmio dado pela opção na folha i , $i = 0, \dots, n$.

A folha 0 é a mais baixa e a n é a mais alta. No caso mais simples, sem barreiras, $npaths(i) = \binom{n}{i}$, onde o binômio $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, para $n \geq i \geq 0$, e $\binom{n}{i} = 0$, caso contrário.

Seja cp um indicador para opção de compra ou *call* ($cp = 1$); e para opção de venda ou *put* ($cp = -1$).

Há diferentes tipos de prêmios, por exemplo:

- normal: $payoff(i) = \max(0, (Su^i d^{n-i} - X) cp)$;
- *cap* ou *floor H*: $payoff(i) = \max(0, \min((Su^i d^{n-i} - X) cp, (H - X) cp))$;
- *cash-or-nothing* com prêmio K : $payoff(i) = \begin{cases} K, & \text{se } (Su^i d^{n-i} - X) \times cp > 0 \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- binária sem *strike* com prêmio fixo K : $payoff(i) = K$.

A equação (A) pode ser aplicada a quaisquer opções europeias, inclusive com barreiras, desde que se saiba o valor de $npaths(i)$, para cada folha da árvore binomial.

Um bom resultado desse método é que este converge para a fórmula contínua de Black–Scholes à medida que a largura da árvore aumenta. Em geral, para opções *vanilla*, a precisão aumenta com o tamanho da árvore.

Ajuste das barreiras sobre árvores binomiais

Entretanto, quanto a opções com barreiras, a convergência do método por árvore binomial não é muito uniforme. Se a barreira não coincide com os nós da árvore, pode haver resultados imprecisos. Em 1994, Boyle e Lau mostraram que é possível ajustar a largura da árvore de tal forma que a barreira coincida com os vértices. Sendo B_1 o valor da barreira, a largura da árvore deve ser igual a:

$$N(i) = \frac{i^2 \times \sigma^2 \times T}{(\ln(S/B_1))^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (B)$$

No caso de existência de mais uma barreira, por exemplo B_2 , com $B_2 < B_1$ sem perda de generalidade, basta tomar o valor de i de tal modo que j seja próximo de

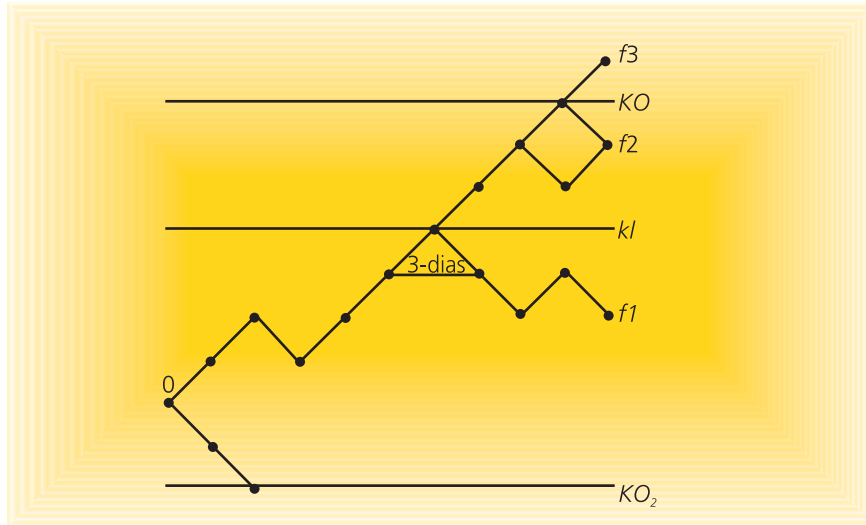
um número inteiro ($i = 10$ já é suficiente na maioria dos casos), onde $j = i \times \frac{\ln(S/B_2)}{\ln(S/B_1)}$.

Cadeias de Markov em árvores binomiais

Em essência, os caminhos nas árvores binomiais da raiz até uma folha qualquer representam cadeias de Markov. Na Figura 2, o nó O representa a raiz da árvore, os nós f_1 , f_2 e f_3 são folhas da árvore e KI , KO e KO_2 representam barreiras. Os valores mencionados são números inteiros entre 0 e n , onde n é a largura da árvore. A folha 0 representa a mais baixa e a folha n , a mais alta.

Abaixo, descrevem-se as possíveis combinações de barreiras, considerando-se os caminhos até as folhas com a aplicação do conceito de reflexão estocástica sobre cadeias de Markov. Em alguns casos, utiliza-se reflexão dupla e até tripla.

Figura 2 – Exemplos de cadeias de Markov e reflexão nas barreiras



1. Sem KI , sem KO : o número total de caminhos até f_1 é igual ao binômio de

Newton, ou seja,
$$\binom{n}{f_1} = \frac{n!}{f_1!(n-f_1)!}$$

2. KI simples (*up-in/down-in*): o número de caminhos até f_1 tocando KI é igual ao número de caminhos até $f_2 = 2KI - f_1$, a imagem de f_1 em KI , ou seja,

$$\binom{n}{f_2} = \binom{n}{2KI - f_1}$$

3. KO simples (*up-out/down-out*): o número de caminhos até f_1 evitando KO é igual ao número total de caminhos até f_1 (caso 0) menos o número de caminhos até f_1 que tocam em KO (caso 1).

4. $KIKO$ do mesmo lado (*up-in* e *up-out/down-in*; e *down-out*): o número de caminhos até f_1 tocando KI e evitando KO é igual ao número de caminhos até f_1 tocando KI (caso 1) menos o número de caminhos até f_1 tocando KO (caso 1). O caso 4 é mais simples que o caso 5, pois ao tocar KO , KI já foi tocado. Em 5, todas as possibilidades devem ser consideradas.

5. $KIKO$ em lados opostos (*up-in* e *down-out/down-in*; e *up-out*): o número de caminhos até f_1 tocando KI e evitando KO_2 é igual ao número de caminhos até f_1 tocando KI (caso 1), menos o número de caminhos tocando KI e depois tocando KO_2 (reflexão dupla), menos o número de caminhos tocando KO_2 e depois tocando KI (reflexão dupla), mais o número de caminhos tocando KO_2 , depois KI e depois KO_2 (reflexão tripla), mais o número de caminhos tocando KI , depois KO_2 e depois KI (reflexão tripla), já que esses caminhos são subtraídos duas vezes.

Em teoria, nesse último caso em especial, seria necessário subtrair as reflexões pares (duplas, quádruplas,...) e somar as ímpares (triplas, quádruplas,...). No entanto, a partir da reflexão tripla, o número de caminhos até a folha torna-se insignificante (ou até nulo) comparado ao total.

Número de caminhos até as folhas da árvore

Sejam S , n , u e p como descritos anteriormente; BKI e BKO os preços das barreiras *knock-in* e *knock-out*, respectivamente; KI e KO a posição das barreiras entre as folhas da árvore binomial, isto é, com valores entre 0 e n , a saber:

$$KI = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{BKl}{S}\right)}{\ln(u)} \right\rfloor + \frac{1}{2}n \quad \text{e} \quad KO = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{BKO}{S}\right)}{\ln(u)} \right\rfloor + \frac{1}{2}n$$

O operador $\lfloor \bullet \rfloor$ deverá ser substituído por $\lceil \bullet \rceil$ se a opção, em vez de ser do tipo *down*, for *up*. A seguir, apresentam-se os valores de $npaths(i)$, justificados na seção anterior, que podem ser utilizados na equação (A) para precificar as opções europeias com barreiras.

Up-in/down-in:

$$npaths(i) = \binom{n}{2KI-i}$$

Up-out/down-out:

$$npaths(i) = \binom{n}{i} - \binom{n}{2KO-i}$$

Up-in e up-out/down-in e down-out:

$$npaths(i) = \binom{n}{2KI-i} - \binom{n}{2KO-i}$$

Up-in e down-out/down-in e up-out:

$$npaths(i) = \binom{n}{2KI-i} - \binom{n}{2KI-2KO+i} - \binom{n}{2KO-2KI+i} + \binom{n}{4KI-2KO-i} + \binom{n}{4KO-2KI-i}$$

Observação: se houver barreira *up-in* e $i > KI$ ou barreira *down-in* e $i < KI$, o

termo $\binom{n}{2KI-i}$ deve ser substituído por $\binom{n}{i}$, já que a própria folha atingiu a

barreira *knock-in*. Se houver barreira *up-out* e $i > KO$ ou barreira *down-out* e $i < KO$, então $npaths(i) = 0$, já que a própria folha atingiu a barreira *knock-out*.

Barreiras em período limitado

Em vez de serem válidas em todo o período, desde o início do contrato até a data de vencimento da opção, em alguns casos, é possível definir começo e término de validade das barreiras *knock-in* ou *knock-out*. Ou seja, o direito de exercer a opção passa a existir, se *knock-in*; ou o direito cessa, se *knock-out*, caso a barreira seja atingida, somente durante o seu período de validade.

Sejam T o período de vencimento da opção e T_1 e T_2 o início e término de validade das barreiras. Sejam n a largura da árvore e $\Delta t = T/n$, o tempo entre dois níveis da árvore. Sejam $n_1 = \lfloor T_1 / \Delta t \rfloor$ e $n_2 = \lceil T_2 / \Delta t \rceil$ os níveis da árvore que representam início e término de validade das barreiras. Assim, existem na árvore três períodos distintos: antes do início das barreiras $(0, n_1)$, no período de validade (n_1, n_2) e depois do término (n_2, n) .

Contabilizando-se os caminhos que chegam até uma folha k da árvore binomial e dividindo-se o período nos três intervalos acima, conclui-se que:

$$\text{npaths}(k) = \sum_{i=0}^{n_2} \binom{n-n_2}{k-i} \sum_{j=0}^{n_1} \text{npaths}B(n_2 - n_1, i - j, KI - j, KO - j) \times \binom{n_1}{j} \quad (C)$$

onde $\text{npaths}B(n, x, KI, KO)$ é o número de caminhos na árvore binomial com largura n até a folha na altura x , com barreiras *knock-in* e *knock-out* nos níveis KI e KO , respectivamente, válidas em todo o período. Por meio das seções anteriores, são calculados $\text{npaths}B(n, x, KI, KO)$ e $\text{npaths}(k)$, em tempo polinomial $O(n^2)$.

Generalização para opções americanas

Como mencionado, as opções flexíveis com barreiras podem ser do tipo européia (só pode ser exercida na data de vencimento) ou americana (pode ser exercida a qualquer momento).

Em termos de árvore binomial, as opções americanas podem ser exercidas em qualquer nível da árvore. O valor da opção americana é o máximo entre os possíveis valores das opções européias com vencimento em cada nível da árvore, isto é: americana (n) = $\max_{k=0}^n$ [européia (k)], para Δt fixo.

Convergência

As Figuras 3 e 4 ilustram a aplicação do método para o exemplo da opção *put* da Figura 1 (preço do ativo-base $S = 100$), com a inclusão de barreiras.

O comportamento das curvas com barreiras é compatível com os casos de Derman (1995) e Saito (1998), onde se verifica a convergência à medida que aumenta o número de períodos (largura da árvore). Apesar de não ser muito uniforme, pode-se obter, pela equação (B), convergência mais precisa (Figura 3).

A Figura 3 mostra a opção normal, sem barreiras, com convergência à fórmula de Black-Scholes e o caso *up-out* com barreira em 130, nos casos normal e refinado pela equação (B).

Figura 3 – Preço da *put* normal sem barreiras e *up-out* em 130

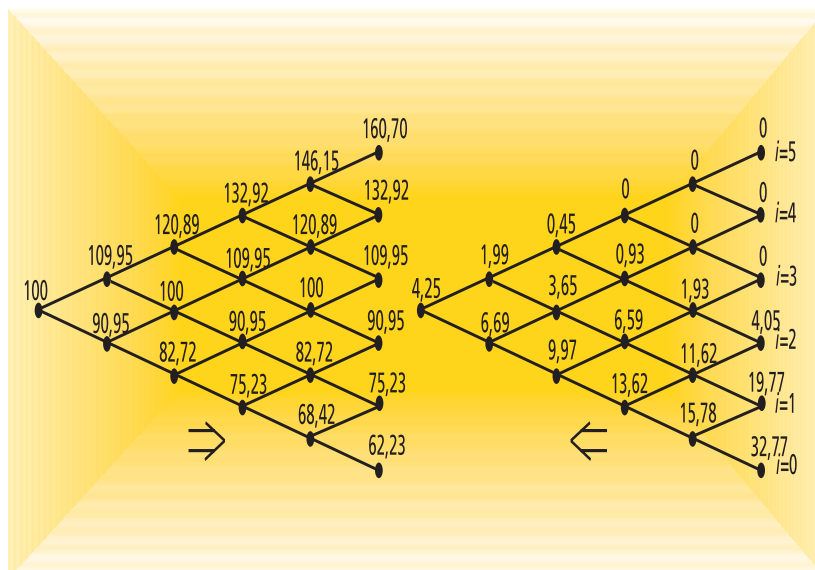
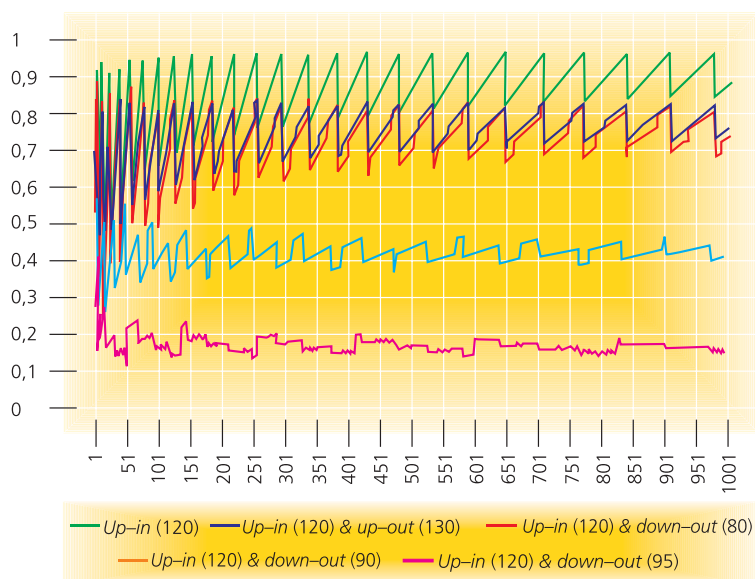


Figura 4 – Preço da put em *up-in*; *up-in* e *up-out*; e *up-in* e *down-out*



A Figura 4 traz os casos *up-in* (120); *up-in* (120) e *up-out* (130); *up-in* (120) e *down-out* (80); *up-in* (120) e *down-out* (90); e *up-in* (120) e *down-out* (95).

Conclusão

Neste artigo, tratou-se da importância de precificar corretamente opções flexíveis com barreiras, como as negociadas na BM&F. Por meio de árvores binomiais, apresentou-se método capaz de precificar essas opções, européias ou americanas, com combinações de barreiras *knock-in* e *knock-out*, pela contagem do número de caminhos até as folhas da árvore, usando reflexão estocástica sobre cadeias de Markov. Além disso, demonstrou-se que a convergência do método é compatível com os demais disponíveis.

Bibliografia

- BRIYS, E. *Options, Futures and Exotic Derivatives: Theory, Application and Practice*. IE-Wiley, 1999.
- DERMAN, E. ET AL. Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers. *Quantitative Strategies Research Notes*, Goldman Sachs, 1995.
- HAUG, E. G. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, 1997.
- HULL, J. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 1997.
- INGERSOLL, J. *Theory of Financial Decision Making*. Rowman and Littlefield, 1987.
- MONTEIRO, V. R. ET AL. Limites de Preço para Opções Flexíveis: Cap, Floor, Knock-in, Knock-out e Rebate. *Resenha BM&F* 152, 2002.
- ROSS, S. *Introduction to Probability Models*. Press Inc., 1972.
- SAITO, R.; ROCHMAN, R. *Análise de Métodos Numéricos para Precificação de Opções*. Relatório do NPP, EAESP/FGV, 1998.

Rudini Menezes Sampaio é professor do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras (Ufla). E-mail: rudini@dcc.ufla.br.

Edson Costa Bignotto é consultor da Maps Risk Management e mestre em Economia Aplicada pela Esalq/USP. E-mail: edson@maps.com.br.

Os autores agradecem os comentários do professor Ricardo Suganuma, da BM&F, e de Daniel Pacífico e João Paulo Negri, da Maps Risk Management. Eventuais erros cabem aos autores.